

Stemming van Pythagoras

In de zesde eeuw voor Christus – zo gaat het verhaal – experimenteerde de Griek Pythagoras met een **monochord**. Dit is een muziekinstrument uit die tijd met één snaar. Pythagoras deelt een gespannen snaar ‘in tweeën’ door hem in het midden vast te zetten. Hij ontdekt dat daardoor ‘dezelfde’ toon klinkt, echter precies één **octaaf** hoger.

Bij het vastzetten van de snaar op $2/3$ klinkt een andere belangrijke hogere toon – de **dominant** (kwint) noemen. Als een snaar $3/2$ – het omgekeerde van $2/3$ – langer wordt gemaakt klinkt hij een kwint lager.

Bij het vastzetten op $3/4$ van zijn lengte ontstaat een tweede belangrijke toon: de **kwart** die ook wel **subdominant** wordt genoemd. Als wederom een snaar $4/3$ langer wordt gemaakt klinkt hij een kwart lager.

Samengevat zijn de resultaten van de bevindingen van Pythagoras:

Lengte van de snaar	Resultaat	Frequentie van de toon
x 2	octaaf omlaag	x 1/2
x 1/2	octaaf omhoog	x 2
x 3/2	kwint omlaag	x 2/3
x 2/3	kwint omhoog	x 3/2
x 4/3	kwart omlaag	x 3/4
x 3/4	kwart omhoog	x 4/3

Figuur 17-1 Kwarten en kwinten

Als een snaar langer wordt, wordt de frequente lager. Als de lengte tweemaal zo lang is ($\times 2$) wordt de frequentie tweemaal zo laag (dus vermenigvuldigd met $1/2$). Als de snaarlengtes worden vermenigvuldigd met een eenvoudig verhoudingsgetal tussen twee gehele getallen, ontstaan tonen die aangenaam – harmonieus – samenklinken. Dit heeft te maken met het natuurkundige principe dat de geluidsgolven van dergelijke tonen ‘mooi’ optellen: er ontstaan geen zwevingen.

Pythagoras was een wiskundige die de wereld bekeek vanuit deze gehele getallen en breuken. Hij gebruikt de door hem ontdekte kwinten om een toonladder van zeven tonen te construeren, terwijl de achtste toon weer een octaaf hoger begon. Hij gebruikt daarvoor een serie snaren die hij via een vast patroon op elkaar stemt telkens een kwint of kwart verschil ten opzichte van een zojuist gestemde snaar.

Voor de liefhebber

Voor de echt geïnteresseerde – je kunt dit stukje gerust overslaan - wordt nu toonladder van Pythagoras afgeleid. Deze toonladder is een andere dan tegenwoordig wordt gebruikt, maar toch wel met verrassende overeenkomsten.

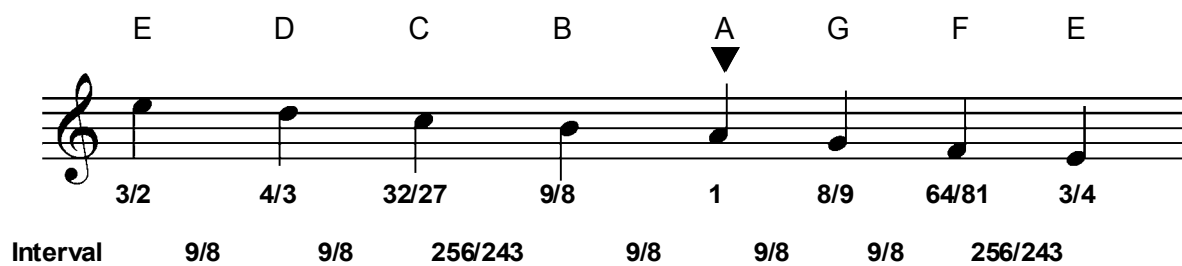
Bekijk de onderstaande tabel.

Tonen	E	F	G	A	B	C	D	E2
1 Berekening	$1/2 * E$	$2/3 * C$	$2/3 * D$	*	$3/4 * E$	$4/3 * G$	$4/3 * A$	$3/2 * A$
2 Resultaat	$3/4$	$64/81$	$8/9$	1	$9/8$	$32/27$	$4/3$	$3/2$
3 Factor	$256/243$	$9/8$	$9/8$	$9/8$	$256/243$	$9/8$	$9/8$	$9/8$
4 Frequentie in Hz	330	347,7	391,1	440,0	495	521,5	586,7	660

Figuur 17-2 Stemming van Pythagoras

Uitgangspunt is de A in het midden van de tabel. Met de verhoudingsgetallen van de frequenties tussen kwinten en kwarten in de tabel op bladzijde @ zijn alle tonen te bepalen vanuit de middelste A.

- Op regel 1 van bovenstaande tabel worden de berekeningen gegeven. Eerst worden D en E2 uit A berekend door ze achtereenvolgens te vermenigvuldigen met $4/3$ (kwart omhoog) en $3/2$ (kwint omhoog). Dan wordt E uit E1 bepaald (octaaf lager). Vervolgens wordt B uit E2 (kwart omlaag) en wordt G uit D (kwint omlaag) bepaald. Als laatste wordt C uit G (kwart omhoog) bepaald en F weer uit C (kwint omlaag) bepaald.
- Op regel 2 staat het resultaat als een breuk genoteerd voor elke toon.
- Op regel 3 staat de intervallen in breuken met het berekende verschil tussen de tonen. Volgens regel 3 zit tussen B en C – net als tussen E en F – een klein interval. Pythagoras had vergelijkbare toonafstanden in de majeur toonladder van tegenwoordig, namelijk $1 - 1 - 1/2 - 1 - 1 - 1 - 1/2$.
- In de onderste regel wordt de frequentie uitgerekend door het resultaat uit regel 2 te vermenigvuldigen met de standaardfrequentie 440 Hertz van de A.



Figuur 17-3 Stemming van Pythagoras op notenbalk

En dan is er iets vreemds. Bij het stapelen van twaalf kwinten krijg je zeven octaven $(3/2)^{12} = 129,7$, terwijl het stapelen van zeven octaven $2^7 = 128$ oplevert. Dit zou gelijk moeten zijn, maar dat is niet het geval. De gestapelde kwinten schieten over het zevende octaaf heen. Dit verschil wordt aangeduid als de **Pythagoreïsche komma**. Deze levert een probleem op bij het stemmen van instrumenten. Bij de tegenwoordig gebruikte stemming is dat opgelost.